上越数学教育研究，第32号，上越教育大学数学教室，2017年，pp.63-74

算数授業における子どもの数学的モデル化に関する研究

ー子どもの思考過程に見られる推論と価値観に着目してー

佐々木　英男
上越教育大学大学院修士課程２年

１．はじめに

全国学力・学習状況調査で依然として課題となっている活用する力を高めるためには，現実的問題と数学的知識をいかに結びつけていくかが重要になる．この力を育成するためには，現実的問題を数学化して捉えていく数学的モデル化を授業における活用場面に取り入れることが有効であろう．数学的モデル化に関する先行研究は，中等教育段階のものは数多くある（e.g.,芦田，2000；西村，2012；清野，2015）が，初等教育段階での研究は十分になされているとは言えない（平林，2015）．

算数授業において「見通し，追究，比較検討」に沿う問題解決を行えば，児童は数学的モデル化を遂行できるのではなかろうか．さらに，初等教育段階において数学的モデル化能力の素地を養うことは，中等教育段階におけるさらなる数学的モデル化能力の向上につながるだろう．特に，現実的問題から現実的モデルを構成する過程を授業において意図的に取り入れることで日常生活における活用力の育成にもつながる．

西村（2012）は，数学的モデル化は，様々な現実上の目的に根ざす応用的な面に関する「数学的過程」として位置付けられていると述べている．数学的モデル化が目的的問題解決であることを考慮すると，数学的モデル化の過程では，モデル化を遂行していく上での推論に，何らかの価値観が関わっていると考えることができる．数学教育における価値観に関しては，近年取り上げられており（e.g.，島田，2015；山崎，2015）また，推論に関しては，特にアブダクションが注目されている（e.g., 和田, 2008;2012）．しかし，数学的モデル化と推論や価値観を扱った研究は少ないのではないか．以上から，本研究の目的は，算数授業において，児童が数学的モデル化を遂行する際，どのような推論がなされ，そこにどのような価値観が働いているのかを明らかにすることである．

そのために，まず，数学的モデル化と推論との関わりを，先行研究をもとに新たな理論枠組みとして示す．また，推論に関わる本研究における価値観の捉えを明確にする．次に，数学的モデル化過程を分析するための教授実験として，活用に関する問題を取り上げた授業を計画し実践する．最後に，教授実験で得られたデータを分析し考察する．

２．理論的枠組み

(1)　数学的モデル化と推論との関わり

先行研究を概観すると，数学的モデル化過程は研究者の視点によって様々な解釈がなされているが，三輪（1983）に代表されるように，現実世界から数学的モデルを構成しそこから導き出された数学的結果を現実世界に再解釈するという基本的な過程は

共通している．本研究では，数学的モデル化と推論との関わりを分析するために，以下で表される，Kehle & Lester,Jr.(2003)による数学的モデル化過程を表した図 1 と記号過程と推論について表した図 2 の関係を基に新たな理論枠組みを提示する．

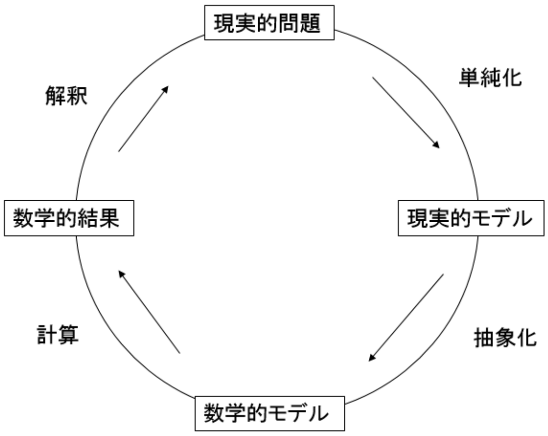

図 1　Kehle & Lester, Jr. (2003)をもとにした数学的モデル化過程

Kehle & Lester,Jr.（2003）は C.S. Peirce の記号論に関わる三つの推論である，アブダクション，演繹的推論，帰納的推論を挙げ，図 2 の過程を考察している．

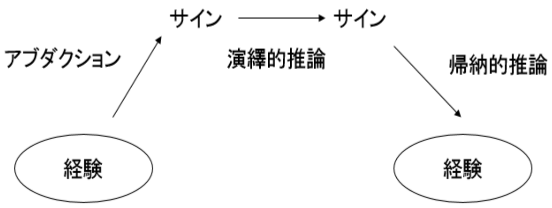

図 2　Kehle & Lester, Jr. (2003)による記号過程と推論

Kehle & Lester,Jr.（2003）は日常で遭遇する経験において，これら三つの推論を意識することなく使っているとも述べており，これらの推論と数学的モデル化を関連づけて考察することは有効である．図 1 の「現実的問題」が図 2 では「経験」として表されている．アブダクションは，図 1 では「単純化」と「抽象化」の場面で表れる．図 2 における一つ目の「サイン」は「数学的モデル」を表し，演繹的推論により導き出された二つ目の「サイン」が「数学的結果」となる．さらに帰納的推論により「解釈」され，「経験」として「現実場面」に戻される．

Kehle & Lester,Jr.（2003）は，アブダクションとは，新しい経験に直面したときに，それを理解することが可能な仮設を導き出す推論であると述べており，近年の数学教育研究においても注目されている推論である．和田（2012）は，アブダクションが演繹的推論や帰納的推論とともに連鎖的に働いているのであれば，数学教育においても重要な推論と考えると述べており，アブダクションの意義や機能を検討することは，探求的な授業の推測の段階を解明することに寄与するであろうとも述べている．このことから本研究では，授業過程の見通しの段階に見られる推論，つまり，数学的モデル化においては，現実的問題から数学的モデルを構成する段階に見られる単純化と抽象化における推論をアブダクションとして捉える．

以上を踏まえ，これらの思考過程による推論と数学的モデル化過程との関わりから Kehle & Lester,Jr.（2003）の図 1 および図 2 を改良した図式を図 3 として示す．

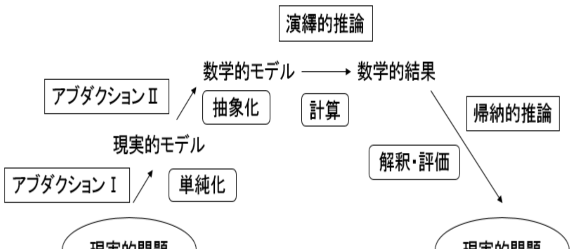

図 3　子どもの思考過程を捉える理論的枠組み

Kehle & Lester,Jr.（2003）ではアブダクションに関して特に区別する記述は見られないが，本研究においては，現実的問題から

現実的モデルを構成する推論をアブダクションⅠ，現実的モデルから数学的モデルを構成する推論をアブダクションⅡとして区別する．一つの経験（現実的問題）を出発点に，アブダクションⅠにより現実的モデルを構成する．具体的な数値を含まないような現実的問題から，数学的表現や数値を含む現実的モデルを構成する過程は，初等段階においては困難であることが予想される．しかし，児童が日常場面で遭遇する経験は，必ずしも数学的表現や数値を含んでいるとは限らない．そのためアブダクションⅠには，児童の興味関心に基づく推論や科学的仮設に基づいた推論も含まれる．構成された現実的モデルからアブダクションⅡにより数学的モデルを見出し記号化（数学化）する．ここでのアブダクションⅠ・Ⅱは相互に矛盾しない（三輪，1983）．

次に演繹的推論により，計算等の数学的処理が行われる．ここでの演繹的推論とは，数学的処理全般を示しており，論証はもちろんであるが，数学的概念と記号を用いた計算や知的表現としての絵図等の数学的処理も含めるものとする．図１のモデル化過程では数学的モデルから数学的結果に至るまでの「計算」の過程がこれにあたる．

最後に，帰納的推論により正しい結果を特定の経験（現実的問題）に適用する．ここで適用できなければ，再度アブダクションにより数学的モデル化過程を繰り返すことになる．ここでの帰納的推論は，数学的結果の妥当性を検討する上で重要な推論であり，帰納的推論によって現実的問題と数学との関わりが明らかになる．図２の「解釈」がこれにあたる．以上の過程を本研究の理論枠組みとして示す．

(2)　本研究における推論の捉え

科学的論理的思考の方法または様式として，一般的に，演繹（deduction）と帰納（induction）の二種類が挙げられる（米盛，2007）．C.S.Peirce は，この二種類の推論にアブダクション（abduction）と呼ばれるもう一つの顕著な思考の方法または様式が存在し，特に科学的発見・創造的思考においてはそのアブダクションが最も重要な役割を果たすと唱えた（米盛訳，1995）.アブダクションが科学的探求のいわゆる「発見の文脈」において仮設や理論を発案する推論であるのに対し，帰納はいわゆる「正当化の文脈」において，アブダクションによって導入される仮設や理論を経験的事実に照らして実験的にテストする操作である（米盛，2007）．つまり，子どもの思考においては，課題を発見したり，課題から結論を推測したりする見通しの段階に見られる推論をアブダクションと捉える．また，帰納的推論は，数学的結果の妥当性を検討する段階，子どもの思考においては，比較検討の段階に見られる推論を帰納的推論と捉える．

演繹的推論は明確な形式的構造を有し，推論の内容を考慮に入れずに，推論の形式のみによって真なる前提から必然的に真なる結論が導かれるというすぐれた特性があり，また演繹的推論はそれが妥当か否かを容易に確かめることができるという利点がある（米盛，2007）．明確な形式的構造を，四則演算や図，表やグラフと捉えれば，演繹的推論は，数学的モデルから数学的結果を導き出す段階で見られる推論であると捉えられる．科学的探求における分析的な演繹的推論の役割は，アブダクションによって提案される仮設や理論を前提にして，その仮設や理論の内容を分析解明し，その仮設や理論から実験観察可能などんな経験的諸帰結・予測が必然的にあるいは高い確率で導かれるかを示すことによって，その仮設や理論を実証的事実に関連づけることである（米盛，2007）．

また，Polya（1958，柴垣訳）は，推論には，論証的推論と蓋然的推論の二種類があ

ることを示している．Polya（1958，柴垣訳）は，論証的推論は数学的証明のように，完全で争う余地のないものであるのに対し，蓋然的推論は争う余地があり，暫定的なものであると述べている．また，Polya（1958，柴垣訳）は，帰納的推論は蓋然的推論の特別な場合であるとも述べていることから，仮設的な推論であるアブダクションと帰納的推論は蓋然的推論であり，演繹的推論は論証的推論であると捉える．帰納的推論は，あることが真であるようないくつかの事例から一般化を行い，それらの事例が属しているクラス全体についても同じことが真である，あるいは，事例のある部分についてあることがいえることを見出して，それらの事例が属するクラス全体についても同じ割合で同じことがいえると推論することである（米盛，2007）．これに対し，同じ蓋然的推論であるアブダクションは，直接観察したものとは違う種類の何者かを推論する，あるいは，直接には観察不可能な何ものかを仮定する（米盛，2007）ことである．

以上から，本研究におけるアブダクション，演繹的推論，帰納的推論を次のように定義する：

アブダクションとは，ある驚くべき現象の観察から出発し，その現象がなぜ起こったかについて何らかの可能な説明を与えてくれる仮設を考え出すことであり，アブダクションは，仮設を立てたり立て直したりしながら問題解決の突破口を見出し，探求を方向づける役割を果たす，思考における「見通し」の段階に見られる推論である，

演繹的推論とは，アブダクションによって提案された仮設からどんな経験的諸帰結が必然的にあるいは非常に高い確率で導かれるかを示したり，仮設から実験観察可能な諸予測を演繹的に導出したりすることであり，演繹的推論は，思考における「追究」の段階に見られ，計算や証明などが演繹的推論の役割を果たす，

帰納的推論とは，仮設が最初に観察された変則的な現象を正しく説明しているかどうかを経験的事実に照らして実験的にテストすることであり，思考における「比較・検討」の段階に見られる推論である．帰納的推論の方法として，Polya（1958，柴垣訳）は，与えられた一組の対象の考察からそれを含むより大きな組の考察に移る一般化，与えられた一組の対象の考察からそれに含まれるより小さな一組の対象の考察に移る特殊化，一つの対象で成立している事実や知識をもう一方の対象との間に類似性を認め，その類似性に基づいてもう一方の対象の考察に移る類比を挙げている．

(3)　本研究における価値観の捉え

本研究においては，最終的な意思決定の根拠となるものを価値観として捉える．見田(1966)は，価値を「主体の欲求をみたす，客体の性能」と定義している．さらに見田（1966）は，その一般的な機能として，意識的行為における選択の基準となることとも述べていることから，価値に対する価値意識が主体の欲求を満たすものを価値観として定義する．ここでいう「欲求」に関して見田(1966)は，もっとも広い意味であって，道徳的・芸術的・社会的欲求を含むあらゆる分野において，あるものを「のぞましい」とする傾向のすべてであると述べているが，本研究では「問題解決の目的に応ずるもの」を「欲求」として捉える．

島田（2015）は社会的オープンエンドな問題を基に，問題解決学習で表出する社会的価値観の特性や多様性を考察している．また，価値観と数学的モデルの変容について，中，長期的に分析しており，社会的オープンエンドな問題の継続的な扱いが大切

である（島田，2015）と述べている．本研究においては，社会的オープンエンドな問題に関わらず，活用に関する問題を扱い，数学的モデル化を意識した授業過程を展開する中で，児童のもつ価値観が特に推論との関わりでどのように作用しているかを分析する．数学的モデル化において価値観がより鮮明に表れる過程として，アブダクションⅠにより現実的問題から現実的モデルを構成する過程を，また，アブダクションⅡにより現実的モデルから数学的モデルを構成する過程を，さらに，帰納的推論により数学的結果から現実的場面へと解釈する過程を捉え分析する．

３．研究方法

本研究では，先行研究をもとに新たに構築した理論枠組みが，子どもの思考において数学的モデル化過程に沿ったものであるという妥当性を検証していく．そのため，本研究では質的研究によるアプローチを試みる．質的研究は，広い意味では，人が書いたり話したりした言葉や観察された行動などの記述的なデータを集め分析する研究方法である．また，もともと社会学や文化人類学で行われてきた研究方法であり，未開の民族から始まって現代社会に至る様々な社会がもつ内部のきまりや構造，文化といったものをえぐり出すことを目的とする研究方法である（日野，1997）．

日野（1997）は，教室には様々な特有のきまりや構造，文化があることに注目すれば，そこに質的な研究方法を適用することができると述べている．さらに，数学教育研究における質的研究の可能性について「①質的研究では参加者と同じ視点から数学の問題や数学が教えられている環境を理解しようとするので，ともすると当然のこととみなされ問題にされてこなかった事柄に光が当てられる．②質的研究で得られた結果に基づいた実践を行うことにより，意味と理解の過程に視点をおいた指導やカリキュラムの研究の可能性がこれまで以上に高まる．」と述べている．本研究では，授業における子どもの思考過程を解釈し，数学的知識の活用においては数学的モデル化が行われており，そこにどのような推論や価値観が関わっているかを明らかにすることを目的としている．

以上から，先行研究をもとに構築した理論枠組みにおいて質的研究を用いることが妥当であると考え，本研究の方法として質的研究を採用するものとする．

本研究では，教授実験により児童の数学的モデル化過程を分析し，その過程において推論と価値観がどのように関わっているかを明らかにする．群馬県にある公立小学校 6 年生（学級全体 33 名のうち習熟度別：標準コースを選択している 22 名）を調査参加者として，2016 年 2 月下旬から 3 月上旬にかけて全 8 時間の教授実験を実施した．この学年の児童は第 2 学年および第 4 学年時において筆者が担任した児童であり，教授実験では筆者が授業者となった．

教授実験で扱った問題は，全国学力・学習状況調査の主として「活用」に関する問題（国立教育政策研究所，2015）に準ずるものや，尋常小学算術（文部省，2007）等を参考に，できるだけ児童の身近にある事象を取り上げたものである．教授実験では A と N の 2 名を抽出児とし，授業中の活動をビデオに記録した．2 名の学力は中程度であるが，授業中の発言が活発であるため思考過程がとらえやすいと判断し抽出児とした．教室の前後 2 台の固定カメラと抽出児に対する移動カメラ 1 台の VTR および IC レコーダーの記録から作成したプロトコルと，授業で使用したプリントの記述等をデータとした．次章におけるプロトコルの左側の数字は発話番号を表し，教師（T），抽出児（A）（N），抽出児以外の児童（S）と

する．

また，実践前には「算数が日常生活に役立っているか」等を，実践後には「日常生活の中に算数の学習が使われていたり使えたりすることを感じられるようになったか」等のアンケート調査を実施しており，抽出児の授業における反応と合わせて分析する．本稿では，その中から二つの教授実験について考察する．

4．教授実験の内容とその解釈

(1)　教授実験１

教授実験１は 2016 年２月 29 日に行った．扱った問題は，尋常小学算術６年上(文部省，2007)の「うるう年」についてである．うるう年についての知識は「4 年に一回」や「オリンピックの年」程度であったが，「うるう年はなぜあるのか」という現実的問題から現実的モデルへと単純化する過程を以下のプロトコルで示す．

S22:一年間は 5 時間と 49 分で…違う違うええっと，一年と 5 時間と，違う，ええと…一年間と 6 時間よりも 11 分短いんです．それが何年間かするとずれていくのでうるう日がある．
A75:2 月の日にちが極端に少ないからじゃない．
S79:何かの記念かな．
N80:科学者が何か発表する．
A83:4 年に一度何かしら誤差が出る．地球の自転の誤差が生じる．
S141:地球がまわる時間がずれるから．

上記のように，現実的問題から数学化するための現実的モデルを作り出すアブダクションⅠとして，児童の興味関心による探究心に基づく価値観（S79，N80）や科学的根拠に基づく価値観（S22，A83，S141）によるアブダクションⅠから現実的モデルを構成しようとしていることが分かる．ここでは，A83，S141 のアブダクションⅠを踏まえ，教師側から以下の現実的モデルを提示した．

地球が太陽の周りをちょうど一周するのに 365.2422 日かかる．一年を 365 日とすると，どんな不都合なことが起こるか．

現実的モデルを提示した後，4 年間ではどうなってしまうかを問うとある児童が，「0.96？」と発言した．これは数学的モデルである 0.2422×4 から 4 年間で約 0.96 日ずれることを指摘したものである．この児童は，アブダクションⅡにより，小数部分を 4 倍すればどのくらいずれるかが求められると判断したのである．ここでは，科学的な根拠に基づく価値観によるアブダクションⅠが数学的モデルを構成するためのアブダクションⅡにつながったと考える．さらに 10 年ではこれを 10 倍した「9.688」「(約) 9 日後に変わる.」ことを見出している．「8 月にサンタさんとか.」の発言からは，季節がずれることを指摘したかったことが予想され，数学的モデルである「0.2422×4」を演繹的推論により計算した「0.9688」という数学的結果を帰納的推論により現実的問題に照らし合わせたときに，4 年に一度うるう年を置くだけではまだずれが生じてしまうことに気付くことができた．そこで条件を追加した以下の現実的モデルを提示した．

4 年ごとにうるう年をおいても 4 年後にちょうど元の位置に戻らない．そこで次のように定める．西暦が 4 で割り切れる年はうるう年とする．しかし，西暦が 100 で割り切れる年のうち，さらに 4 でその商が割り切れないものは平年とする．

この前に 4 年ごとに来るはずのうるう年が平年となったのは西暦何年か．この次にこのようなことが起こるのは西暦何年か．

ここでは新たな現実的モデルから数学的モデルを再構成することになる．前半の現実的モデルでは，ずれが生じることを乗法

により導き出した．後半の現実的モデルから数学的モデルへと抽象化する過程では，「4 年ごと」という現実的モデルから「公倍数や倍数を使う」というアブダクションⅡが見られた．また,「割り切れる」という現実的モデルから「偶数ではないか」というアブダクションⅡも見られた．児童が数学的モデルを構成する際には，現実的モデルに示されている言葉を基にアブダクションⅡにより演算や既習内容を考えている．ここでは，現実的モデルから数学的モデルを構成する手がかりとなる言葉を探していくという，児童のこれまでの経験から生じる価値観が働いている．以下にその場面のプロトコルを示す．

T244：ちょっと自分でこの計算使いそうだなっていうのを書いてみて．割り算使えそう？あとは？何の勉強使いそう？
S264：公倍数.
A293：たぶんヒントは 100 が 4 の倍数ってこと
A323：で，これ上二ケタっていうんかな？
N324：上二ケタ？はあれじゃない，奇数はだめ，奇数は無理でしょ.
A325：うん,奇数は 4 で割り切れないから.
A335：4 で割れなければうるうではないって書いておこう.

A と N はしっかりと立式して計算しているのではなく，上二ケタの筆算や，100 の倍数を書き出して消していきながらあてはまるものを探し出した（A323，N324）. 現実的モデルを与えられた段階から，会話と記述による演繹的推論が行われている．追究の段階においては，明確に立式しなければならないという制約がなければ，二人が行っていたような会話や，メモ程度ではあるが知的表現としての簡単な記述による演繹的推論が行われる.

数学的結果から帰納的推論により現実的問題へと解釈する段階では，数学的結果を導いたとほぼ同時に解釈が行われており，それが個人で解釈される場合（A305）と，会話による解釈が進められる場合（N375 以降）が見られた．以下にその場面でのプロトコルを示す.

A305：あれ，何でだろう？あ，そうか．これは小数になるからいけないんか.
N375：8 足す 4 が 12，12 足す 4 が 16，だから，やっぱりこれ公倍数いけるね.
A376：うん. 計算はエックス割る 100 割る 4 ができてしまえば，そのときは普通にうるう年のときだよ.
N377：やっぱり 4 の公倍数のときじゃないとだめでしょ．公倍数いけるね.
A378：4 の倍数じゃない？公倍数なの？
N379：うん，公倍数でいいんじゃね？
A380：4 と何の公倍数なの？
N381：4 と…

A305 の発言では，数学的結果を帰納的推論により解釈した際に,「割り切れるということは商が整数になることである」という経験により，商が小数になることは誤りであることに自ら気づいている．公倍数という言葉の使い方について，N は倍数で考えていながら公倍数と発言している（N375）ことから，A は二つ以上の数字が必要であることを指摘し，公倍数の正しい解釈を促している（A378，A380）. 比較検討の段階では，数学的な正しさを追求したり，数学的結果の妥当性を検討したりしようとする価値観から帰納的推論により解釈することで数学的結果を現実的問題に適用できるか，または再解釈が必要かを判断している.

(2) 教授実験 2

教授実験 2 は 2016 年 3 月 1 日に行った.

事前に行ったアンケート調査において,「算数が日常生活に役立っているか」という問いに「はい」と答えた 29 名の児童のうち，26 名が具体的な場面として「買い物」や「消費税の計算」を挙げた．本時では，

この「買い物」の問題を扱った．

はじめに，買い物の場面で児童がどのような価値観をもっているかを明らかにするために，買い物をするときに何を気にしているかについて聞いた．以下にその場面でのプロトコルを示す．

S24：商品の値段
S28：目的，何がほしいとか．
S31：消費税
S45：一個あたりの値段
S63：生産地

ここで見られる価値観は，経済活動に基づく価値観（S24，S31），物的欲求に基づく価値観（S28），数学的な事実に基づく価値観（S45），社会的事実の探求に基づく価値観（S63）など様々であった．

本時では，電化製品を購入対象として設定した．児童が高額の電化製品を購入するという経験はほとんどないが，家族の中で電化製品を購入した経験をしている児童は多い．また，今後そういった経験が増えることを想定して本時の課題を設定した．

電化製品を購入する際に考えることについては，「品質」，「性能」，「メーカー」，「強さ」などが挙げられた．ここでは購入金額に目を向ける発言は見られない．児童にとって買い物の場面での購入金額はそれほど重要ではないことが考えられる．しかし，現実的モデルを構成するためには，買い物という現実的問題に数学的な視点を与える必要がある．現実的モデルを提示するまでのプロトコルを以下に示す．

T157：いろいろ（な店を）見た結果，全く同じものが売っていたとしたら，その後何考える？
S159：値段．
T160：何で値段を考えるかというと…
S161：安さが違ったり…割引とか．
S163：ポイント．

買い物という現実的問題では，教授実験1で見られたような現実的モデルの構成に至るアブダクションⅠが表れなかったため，教師は値段に目を向けるような働きかけをした（T157，T160）．児童にとって買い物の場面では，経済活動に基づく価値観よりも物的欲求に基づく価値観が表出しやすいと判断できる．さらに本時で設定した課題には購入に際し付加されるポイントを考慮したものを考えた．S163 から，購入特典としての「ポイント」は児童の身近に存在していることがうかがえる．ここでは，S159，S161 の発言を受け，以下の現実的モデルを提示した．

先生は部屋用のコードレスの掃除機と小さめのテレビを買おうと思います．A 店と B 店はそれぞれ次のような価格設定で販売しています．

A 店：全品 10％オフ，さらに値引き後の10％ポイント還元
B 店：2 品同時購入で合計金額の 20％オフ

掃除機の定価は 29800 円，テレビの定価は 39800 円です．どちらの店で買うとお得ですか．

ここで，直感的にどちらがお得かを問うとほとんどの児童が B 店を予想した．そこであらかじめ次の条件を用意し提示した．

先生は A 店のポイントカードで 500 ポイント分使おうと思っています．１ポイントは 1 円です．

この条件を提示したところ，数人が A 店の方がお得ではないかと予想を変え，「微妙です．」という発言も見られた．ここでは，はじめに 10％オフの 10％ポイント，つまり，「10％オフのさらに 10％オフ」と「20％オフ」では「20％オフ」の方がお得だというアブダクションⅡが行われたが，授業者が条件を加えることで児童のアブダクションⅡが揺らいだと判断できる．このことにより再度アブダクションⅡを行い，数学的モ

デルを構成していく．追加された条件から推測した結果，微妙であると判断されたことで数学的モデルを構成する必要性が生じ，新たなアブダクションⅡが促された．

現実的モデルから数学的モデルを構成する際には，演算の根拠となるアブダクションⅡが見られた．以下にその場面のプロトコルを示す．

A235：2 品同時購入ってことは足し算は使うよね．
N236：つうか，かけ算もいるでしょ？
A237：引き算はどうかな？500 ポイント使うから 500 引くか．
N238：てゆうかこれ全部いるんじゃないの？
A250：どっちが大きいのか，あ，値段が高いのかっていうのを知るときに引き算．

A の発言からは，演算の根拠となるアブダクションⅡが見られる（A235，A237，A250）が，N の発言には見られない（N236，N238）．N はこの後，演繹的推論により，割合の計算をしながら何ポイントもらえるかを求めているが，A237 の発言をもとに進めたことで間違いがあることに気づく．ここでは，演繹的推論により導き出された数学的結果を帰納的推論により解釈しているが適用できないと判断し，再度数学的モデルを構成し直している．以下にその場面でのプロトコルを示す．

N368：500 ポイント使うってことは，0.1 したあと 500 引く．
N373：やすっ．1000 円単位になっちゃったよ．おかしいな．なぜ．なぜ 1000 円単位になった？
N375：おかしすぎる．ま，とりあえずこれに 0 を一個付けておこう．
N376：これ何求めたんだっけ？6174 が値引き後の 10%付きだから．
A378：6763 はね 10%値引き後のポイント付きでしょ．片方のそれぞれの 10%のポイントがあるじゃん．そのポイントを足した数．だからその数と 500 を足すとどれくらい引かれるかっていうあれになる．
N378：なんだ．足すんかよ．

N の計算では，もらえるポイントを合計しようとしているため，「500 引く」ではなく足さなくてはならない．また，N373 からは，ポイントを計算しているはずが購入金額を計算していると勘違いしてしまっていることが予想される．N375 からは，0 を一個付けることで，29800 円や 39800 円といった数値と比較し購入金額に近くなるのではないかという，これまでの経験を踏まえた価値観が働いていたと考える．

５．結果と考察

本研究における教授実験を通して，算数授業において，児童が数学的モデル化を遂行する際にどのような推論がなされ，そこでどのような価値観が働いているかが明らかになった．

現実的問題から現実的モデルを構成するアブダクションⅠに関わる価値観としては，教授実験 1 で明らかになったように，児童の興味関心による探究心に基づく価値観や，科学的な根拠に基づく価値観が見られた．そこから現実的モデルを構成し，その現実的モデルを基に数学的モデルを構成することができた．教授実験 2 で見られたように，アブダクションⅠにおいて，現実的問題に対する児童の価値観が現実的モデルを構成するに至らない場合もある．現実的モデルを構成するためのアブダクションⅠを促す教師の働きかけも必要である．アブダクションⅠは現実的問題に依存するものであると言えるが，現実的問題と数学的知識を結びつけるものとしてきわめて重要な推論である．

教授実験 2 では，現実的モデルへの目的

意識をもたせることでアブダクションⅠを促すことができた．西村（2001）においても，数学的モデル化教材では，実際に児童が探求の必要性を感じることが大切であることが述べられており，目的意識をもたせることの重要性が示されている．現実的モデルを構成（または提示）する前に，いかに現実的問題から数学化するための目的を見出していくかを児童と教師，または児童相互で議論していくことが日常場面での活用につながり，自らの興味関心に基づく価値観から数学的モデル化を進めることで算数への興味関心も高まる．

教授実験後のアンケート調査において，「算数が意外と世の中で使われていることがわかりました」という記述が多く見られた．これらから，児童は日常場面において算数が使われているという意識が低かったことがわかる．また，これまでの授業においても，教科書で学んだ知識が日常場面にどう使われているのかを考えることが少なかったのだろう．本研究における教授実験では，数学的表現を含まない現実的問題から児童のもつ多様な価値観をもとに現実的モデルを構成していく過程を教師が意図的に取り入れることで，算数授業と日常場面をつなげることができた．

現実的モデルから数学的モデルを構成するアブダクションⅡにかかわる価値観としては，既知の数学的知識を使って数学的モデルを作ろうとする価値観が表れやすかった．具体的な数値や数学的表現を含む現実的モデルが構成されれば，数学的モデルに向かうための価値観からアブダクションⅡが行われる．これは児童にとっては当然の数学的活動である．使用する四則演算については学級全体ではすべて必要であると確認される場面もあったが，個人の活動を見ると，それぞれが根拠をもとに演算決定を行っていた．ただし，帰納的推論により数学的結果が適用されない場合は再度アブダクションⅡにより演算を変更する様子も見られた．

数学的結果を導き出す演繹的推論の場面では，明確に立式して数学的モデルを解いていくというよりも，個人の活動のみならず，児童相互の会話やそれに付随するメモ程度の記述の中で演繹的推論が進められていることが多かった．本研究における教授実験の記述では，単語程度の記述や知的表現としての絵図，表等による数学的処理が多く見られた．

教授実験２において，N は数学的モデルから数学的結果を導き出した際に，N373 の発言から帰納的推論が行われたと考える．数学的結果からすぐに帰納的推論が行われ「おかしい」と判断された．三輪（1983）は，解釈・評価の場面においては，たとえば，結果の数値に対する敏感さが要求されようと述べている．つまり帰納的推論では，数学的な正しさを追求したり，結果の妥当性を検討したりするという価値観により，数学的結果を導いたこととほぼ同時に帰納的推論を行い，現実的問題に適用できる結果かどうかを判断している．

帰納的推論の場面では児童のそれまでの経験，特に算数授業に関わって，数学的な正しさや妥当性を検討しようとする価値観が見られた．しかし，数学的結果に対して，帰納的推論を行わずそれが正解だとして思考を終えてしまう児童も見られた．三輪（1983）は，数学的モデル化過程は，単に，事象に対する数学的モデルを作るということにとどまらず，これを使って作業し，評価し，いっそう改良するという全過程を含むものとして解されることは注意を要することであると述べているように，帰納的推論により，数学的結果を現実的問題に戻って解釈することが数学的モデル化においては重要な役割を果たす．

本教授実験では，筆者のこれまでの教職経験で行ってきた，見通し・追究・比較検討といった授業構成で授業を進めた．図 3 で示した本研究における子どもの数学的モデル化過程と推論を捉える枠組みと授業構成との関係を表したものを以下の図 4 として示す．

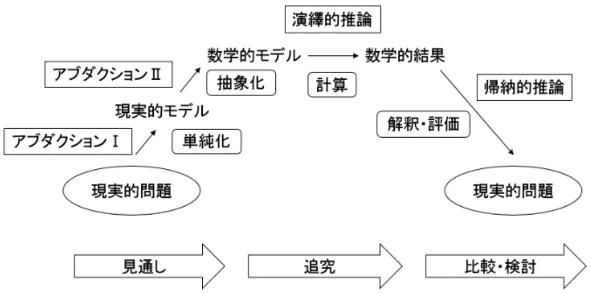

図 4　図 3 の枠組みと授業過程との関係

アブダクションが，仮設や理論を発案する推論であると捉えると，それに伴う数学的モデルを構成する過程が「見通し」，演繹的推論が，明確な形式的構造を有する推論であると捉えると，数学的モデルから数学的結果に至るまでの過程が「追究」，帰納的推論が，仮設や理論を経験的に事実に照らして実験的に操作する推論であると捉えると，数学的結果を解釈・評価する過程が「比較・検討」と言える．本教授実験では，教科書以外の題材から，活用に関わる問題を設定し教授実験を行った．授業構成自体は，これまで筆者が行ってきた，教科書の題材を扱ったときと同様，見通し，追究，比較・検討に沿う授業を展開した．その結果，教授実験の解釈から，それぞれの授業で違いはあるものの，子どもの思考過程において数学的モデル化過程と言える段階が見られることが明らかになった．これは，数学的モデル化の特徴である，数学的知識の活用によるものであると捉える．与えられた課題から，既習の数学的知識を活用しようとすると，解決の見通しをもってアブダクションにより数学的モデルを構成し，その数学的モデルから演繹的推論を行い，数学的結果を導き出し，帰納的推論により現実的問題を解釈するという過程は，これまでの算数授業において繰り返し行われてきた過程である．教師が数学的モデル化を意図し，子どもの思考に沿うように「見通し，追究，比較検討」という授業過程を構成していくことで，子どもの数学的モデル化能力の素地を養うことにつながる．しかし，初等段階においては，子どもが一人で問題場面の数学的な解釈を進めることには限界がある（平林，2015）ため，数学的モデル化を遂行するには教師の適切な関わりも不可欠である．

６．まとめと今後の課題

本研究では，算数授業において，児童の数学的モデル化過程に推論と価値観がどのように関わっているかを，教授実験を通して分析した．本稿では，先行研究をもとに新たに構築した理論枠組みにより二つの教授実験について考察した．

アブダクションや帰納的推論に関わる価値観に関しては，本研究の教授実験だけでは，取り上げられたものがまだ少ない．そのため，価値観の分類をすることができなかった．価値観の分類ができれば，それぞれの推論に対して傾向がつかみやすくなることも考えられる．今後，実践を重ねる中で，価値観の分類も可能になってくるだろう．

今後は，本研究で構築した理論枠組みと結果を基に実践を積み重ねていくことが必要である．

引用・参考文献

芦田俊彦．(2000)．数学的モデリングの導入に関する考察－中学校への導入を中心として－．第 33 回数学教育論文発表会論文集．199-204．

G.Polya（柴垣和三雄訳）．(1958)．数学における発見はいかになされるか１　帰納と類

比．丸善
G.Polya（柴垣和三雄訳）．(1958)．数学における発見はいかになされるか２　発見的推論－そのパターン－．丸善
日野圭子．(1997)．数学教育における質的な研究方法によるアプローチの可能性－授業における子どもの理解を捉えるために－.東京理科大学理学専攻科雑誌第 39 巻．13‐21．
日野圭子．(2009)．子どもの授業中の問題解決における他者の理解－算数科「こみぐあい」の調査から－．宇都宮大学教育学部教育実践総合センター紀要第 32 号．61-70．
平林真伊．(2015)．数学的モデル化における児童による問題場面の解釈の促進－混み具合の問題に関するインタビュー調査を通して－．日本数学教育学会数学教育学論究．第 97 巻．169-176．
Kehle, E. & Lester, K. Jr.（2003）． A semiotic look　at modeling behavior. In R. Lesh & H. Doerr　(Eds.),　*Beyond　Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*（pp.　97-122）Lawrence Erlbaum Associates．
国立教育政策研究所．(2015)．平成 27 年度全国学力・学習状況調査解説資料．
国立教育政策研究所．(2016)．平成 28 年度全国学力・学習状況調査解説資料．
国立教育政策研究所．(2012)．OECD 生徒の学習到達度調査（PISA)．http://www.nier.go.jp/kokusai/pisa/pdf/pisa2012_result_point.pdf（2016.2.16 確認）
国立教育政策研究所．(2016)．全国学力・学習状況調査　授業アイディア例．http://www.nier.go.jp/jugyourei/index.htm（2016.12.6 確認）
見田宗介．(1966)．価値意識の理論．弘文堂．
三輪辰郎．(1983)．数学教育におけるモデル化についての一考察．筑波数学教育研究．第 2 号．117-125．
文部省.(2007).尋常小学算術　復刻版　第六学年児童用上．啓林館．
西村圭一．(2001)．数学的モデル化の教材開発とその授業実践に関する研究－高等学校数学科を中心に－．東京学芸大学大学院修士論文．
西村圭一．(2012)．数学的モデル化を遂行する力を育成する教材開発とその実践に関する研究．東洋館出版社．
清野辰彦．(2015)．「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化の学習指導－「比例とみなす」見方に焦点をあてて－．日本数学教育学会数学教育学論究．第 97 巻．105-112．
島田功．(2015)．社会的オープンエンドな問題を用いた問題解決学習で表出する日本の小学生の社会的価値観と数学的モデルの特性の研究－横断的研究法と縦断的研究法を用いて－．第 3 回日本数学教育学会春季研究大会論文集．109-116．
清水美憲．(2007)．算数・数学教育における思考指導の方法．東洋館出版社．
和田信哉．(2008)．数学教育におけるアブダクションの基礎的研究－形式の観点からの検討－．新潟大学教育学部数学教室数学教育研究．第 43 巻第 2 号．4-10．
和田信哉．(2012)．探求的な算数・数学の授業における推測の段階に関する研究．科学研究費助成事業研究成果報告書．
山崎美穂．(2015)．数学教育における価値を捉える視点とその理論的背景．日本数学教育学会数学教育学論究．第 97 巻．201-208．
米盛裕二編訳．(1990)．パース著作集 1　現象学．勁草書房．
米盛裕二．(2007)．アブダクション－仮説と発見の論理－．勁草書房．